

05

Teorías variacionales del campo electromagnético

Aunque la teoría electromagnética en su forma final está determinada por las ecuaciones de Maxwell, la predicción de la corriente de desplazamiento fue una conjetura más bien empírica.

Surge la pregunta de si el electromagnetismo, de forma similar a la gravitación, puede ser derivado de algún principio más universal. Veremos que los principios variacionales son una formulación que encapsula todo el electromagnetismo y constituye una de las técnicas matemáticas que más éxito han obtenido en el análisis de los principios físicos.

De una forma rudimentaria lo aplicó Fermat a la luz, demostrando que los rayos de luz, siempre siguen la trayectoria que emplea el menor tiempo posible entre dos puntos fijos. Maupertuis estableció un principio similar para la mecánica, conocido como el principio de mínima acción. Posteriormente, Lagrange y Hamilton generalizaron este principio de mínima acción.

Euler fue quien sistematizó matemáticamente los principios variacionales que minimizan una integral para condiciones de contorno fijas, y a partir de las cuales se derivan las ecuaciones de movimiento.

Veremos que las ecuaciones de Maxwell también se pueden derivar a partir de la variación de una simple integral de acción, lo que justifica su estructura y coherencia interna entre ellas.

Se ha dicho que la teoría variacional, selecciona entre todos los mundos posibles, la realidad para la cual la integral de la acción es una extremal, y en ello se han visto

resonancias del principio variacional de Leibniz. Según este, vivimos en el mejor de los mundos posibles, lo que también es una forma sutil de metafísica pitagórica.

Algunos autores interpretan que, al encapsular la integral de la acción toda la trayectoria real en el tiempo, el camino que deben seguir las partículas ya está predeterminado, y sugieren que con esta teoría se están introduciendo indirectamente argumentos teleológicos y de predestinación.

Fue Planck quién hizo la observación de que, para los sistemas que se pueden derivar de principios variacionales, la ley de la conservación de la energía es un resultado de ellos y, dichos principio variacionales, son sólo aplicables a los sistemas de procesos reversibles.

Sugiere que hay limitar la interpretación de los principios variacionales sólo al problema físico particular al que se aplican, desechando conceptos filosóficos de causalidad en ellos. También se debe evitar generalizaciones, como funciones de Lagrange del Universo, en las que se puede incluir y justificar casi todo.

Sin embargo, la aplicación posterior de los principios variacionales a la mecánica cuántica, de la que también es un resultado el electromagnetismo, no ha impedido que prosperen las ideas pitagóricas y neo-platónicas respecto a la simplicidad y orden numérico de un mundo real externo independiente de nuestras percepciones.

Su armonía con un orden lógico y racional subyacente a todas las cosas e, independiente de la mente humana, era el presupuesto de la cosmología griega. Esta idea fue recogida en la era post-escolástica por Roger Bacon, quién atribuyó una predilección de la mente humana a buscar pautas en la observación de la naturaleza, basadas en la simplicidad y la matemática. Existía la convicción de que, un punto de vista mecánico y matemático no sólo ordenaba los datos empíricos, si no que daba también una explicación objetiva de la realidad.

Ya Galileo sugirió que el "libro de la Naturaleza" estaba escrito en lenguaje matemático. El trabajo cumbre de esta forma de pensar fueron los Principios de Filosofía Natural de Newton, con su teoría de la gravitación, basada en corpúsculos que interaccionan a distancia. Posteriormente, Faraday, con intuición y argumentos de simetría, estructuró formalmente sus resultados experimentales con una interpretación basada en campos que interaccionan por acción contigua, que sentaron las bases para el posterior desarrollo de Maxwell.

Sin embargo, la polémica estaba abierta, y los positivistas como Mach negaron que la realidad pudiera ser explicada causalmente. Postularon que la teoría científica sólo puede describir los datos experimentales y las relaciones entre ellos, manifestando que las conclusiones universales son creaciones sólo de la mente humana. Sus máximas, fueron que no sabemos nada, excepto de estructuras de relaciones entre cosas

desconocidas. Sugerían que toda ley debe mantenerse simple hasta que la contraria es probada y que la simplicidad observada se debe sólo a los límites y al tipo de fenómenos accesibles a nuestros sentidos.

Sin embargo, todas estas argumentaciones positivistas llevan a situaciones estériles y el verdadero conocimiento surge de estructurar la información experimental, tratando de simplificar las hipótesis necesarias y de predecir cada vez más fenómenos con cada vez menos teorías. Ejemplo de ello es la teoría general de la relatividad de Einstein, en la que el concepto de fuerza gravitatoria ya no es necesario, y lo mismo su teoría de la relatividad restringida, en que los campos eléctricos y magnéticos se unifican en una sola identidad dual.

Según Planck, hay que abandonar todos los prejuicios aristotélicos de causa final o, como en el caso de Maupertuis, de principios teleológicos en el principio de mínima acción, si no se quiere regresar al obscurantismo o a la esterilidad positivista. Como decía Weyl, las justificaciones de teorías con frases que contienen expresiones como "verdadera simplicidad interna" o "profunda armonía" son peligrosas por sus insinuaciones metafísicas si no se han definido previamente.

Según Heisenberg, se debe hablar más bien de modelos adecuados para una descripción de la naturaleza, no de teorías que la interpreten, para evitar caer en discusiones ontológicas estériles tan habituales o de antropomorfismo científico. O como decía Feynman el fin de la física debe ser hacer descripciones predictivas de la naturaleza y no dar explicaciones respecto a ella. Sin embargo Thom,, señala que predecir no es explicar, y siempre queda según Wigner por explicar la irrazonable eficacia de las matemáticas en la naturaleza.

Las teorías especulativas sin experimentación, implican siempre un anquilosamiento de autojustificaciones que se perpetúa al no ser verificable. Para evitar moverse bipolarmente siempre entre los dos extremos escolásticos del realismo y el nominalismo, el último criterio de verdad se encuentra en el principio de falsación de Popper (1902-1994), de que "toda teoría o modelo se da por bueno mientras no sea contradicho por la experiencia" y de que "toda teoría científica debe ser contrastable con la experiencia y tener un carácter predictivo previo a la realización del experimento."

Sin embargo, a pesar del éxito de los principios variacionales, no hay ningún criterio que nos diga previamente qué función se debe extremalizar y por qué la naturaleza escoge una determinada función de la acción y no otra.

Se debe tener también en cuenta que todo principio variacional al final se expresa en un conjunto de ecuaciones diferenciales. De forma inversa, si tenemos un conjunto de fenómenos representados por ecuaciones diferenciales, existe la posibilidad de su

reducción a un principio variacional que las condensa con economía matemática. Si se prefiere una formulación integral o diferencial, sólo es un asunto de conveniencia.

Para las aplicaciones prácticas, suele ser más adecuada la formulación diferencial. En cambio, de la expresión general integral se pueden extraer teoremas u otras leyes de invarianza y conservación debidas a las simetrías, como las estudiadas por Noether (1882-1935), que no son fácilmente deducibles de la formulación diferencial.

Por último se ha de comentar que, para los principios variacionales aplicados al electromagnetismo, a partir de una lagrangiana electromagnética, se obtienen tanto las ecuaciones de Maxwell del campo como la trayectoria de las partículas con carga eléctrica en dicho campo, lo que en sí mismo no es evidente. Esto es debido a que la interacción es siempre formulable de forma hamiltoniana.

Sin embargo, se ha de tener en cuenta que la mecánica clásica es sólo un límite de aproximación de la mecánica cuántica, que no es equivalente a un único principio variacional, o todavía no se ha demostrado que exista. Veremos más adelante que Feynman da una interpretación más sutil a los principios variacionales con sus integrales de camino.

Ecuaciones variacionales de Euler-Lagrange

Consideremos un campo escalar $\phi(x^\alpha)$, cuyos valores están fijados en dos tiempos t_1 y t_2 y en la superficie de la frontera ∂V de un volumen V del espacio físico.

Para medios continuos, se define la funcional S como la integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\alpha}) c dt d^3x = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\alpha}) d^4x$$

donde $\mathcal{L}$ es una función de $\phi(x^\alpha)$ y de sus derivadas parciales

$$\phi_{,\alpha} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$$

También representaremos por el elemento de volumen n en el espacio de Minkowski $d\Omega = d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c dt dx dy dz$, y por $\partial\Omega$ la superficie que delimita un volumen Ω en el espacio de cuatro dimensiones.

Cuando $\mathcal{L}$ cumple determinados requisitos que más adelante veremos, se le denomina como la función densidad de Lagrange, o simplemente densidad lagrangiana, y al funcional S como la acción del campo, o simplemente acción.

designaremos como lagrangiana L a la integración espacial de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}$

$$L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\alpha}) d^3x$$

El cálculo variacional, desarrollado por Euler, establece que si existe una función de campo $\phi(x^\alpha)$ que hace extremal (máximo o mínimo) a la integral de la acción S , entonces se verifican el conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}} = 0 \quad \text{Ecuaciones de Euler - Lagrange}$$

donde se ha abreviado la notación

$$\partial_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Por (x^α) con el superíndice en griego, se designa a un conjunto de variables continuas que, en general, serán la coordenada temporal y las tres coordenadas posición espaciales designadas por $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x^\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} (x^0, x^1, x^2, x^3) \stackrel{\text{def}}{=} (ct, x, y, z)$$

Cuando nos refiramos solo a las coordenadas espaciales, se utilizará índices latinos

$$\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{x}^I) \stackrel{\text{def}}{=} (x^1, x^2, x^3) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y, z)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange forman un conjunto de ecuaciones de segundo grado que determinan el campo, una vez fijadas las condiciones de contorno.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se demuestran suponiendo que se suma al campo $\phi(x^\alpha)$ en cada instante t una función de perturbación $\eta(x^\alpha)$, que se anula los puntos de la frontera $\vec{x}_{\partial V}$ de ∂V

$$\eta(\vec{x}_{\partial V}, t) = \eta(\vec{x}, t_1) = \eta(\vec{x}, t_2) = 0$$

de forma que la acción perturbada sea

$$S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L}(\phi + \varepsilon\eta, \phi_{,\alpha} + \varepsilon\eta_{,\alpha}) dt d^3x$$

donde ε es un parámetro infinitesimal, será extremal cuando se verifique

$$S'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}} \eta_{,\alpha} \right) d^4x \equiv 0$$

Integrando por partes el segundo término de la integral, y recordando que η se anula en la frontera, se llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\alpha}} = 0$$

Recordemos que un índice repetido significa que debe sumarse para todos los índices posibles, excepto si se especificase otra cosa.

En el caso de que la densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\Phi^\beta, \Phi_{,\alpha}^\beta)$ dependa de varias funciones de campo Φ^β y de sus derivadas $\Phi_{,\alpha}^\beta$, las ecuaciones de Euler-Lagrange vienen dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \Phi^\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \Phi_{,\alpha}^\beta} = 0$$

Muchas veces se utiliza la notación abreviada

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} \equiv E_L \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\alpha}}$$

Es importante observar que las ecuaciones de Euler-Lagrange $E_L = 0$ son invariantes ante una $\mathcal{G}$ -transformación galileana si $\mathcal{L}$ también lo es.

En mecánica, se demuestra que, para los procesos reversibles, existe siempre una función lagrangiana para la cual las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a las ecuaciones mecánicas de movimiento newtoniano y son simétricas por una inversión en el tiempo. También las ecuaciones de ondas de la mecánica cuántica obedecen a un principio variacional. En general todo sistema que obedece a unas ecuaciones de movimiento del tipo Sturm-Liouville, se pueden deducir de una función lagrangiana, extremalizando (variando) su integral de acción.

El principio variacional, sin embargo, no nos dice como escoger la Lagrangiana, y su elección es más bien una cuestión de habilidad e intuición física.

Además, el campo no está determinado por una única lagrangiana ya que se le puede sumar siempre un campo vectorial $\Lambda^\beta(x^\alpha)$ cuya divergencia sea nula $\partial_\beta \Lambda^\beta = 0$, que no contribuye a la variación al estar las condiciones de frontera fijas y al integrar variación se anula

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} (L + \partial_\beta \Lambda^\beta) d^4x = \delta \int_{\Omega} L d^4x + \delta \int_{\partial\Omega} \Lambda^\beta dS_\beta = \delta \int_{\Omega} L d^4x$$

Por tanto, $L + \partial_\beta \Lambda^\beta$, con Λ^β arbitrario, lleva las mismas ecuaciones de campo y físicamente es indistinguible. Veremos mas adelante que esta invarianza determina también la estructura admisible de las ecuaciones de Maxwell.

Faraday y Thomson, introdujeron el concepto de líneas de fuerza de los campos eléctricos y magnéticos, que fue una forma de visualizarlos sin matemáticas. Generalizando este concepto, Maxwell introdujo el concepto de campo como una entidad invisible que se extiende por todo el espacio. Este concepto se ha mostrado muy útil y evita las paradojas de Newton de las interacciones instantáneas a larga distancia.

La materia crea campos que se propagan por el espacio e interactúan con otra materia que a su vez modifican el estado del campo. Es un proceso iterativo que sólo en determinados casos se puede resolver fácilmente de forma analítica. A los seguidores de Newton, este concepto les parecía absurdo filosóficamente, sin embargo se ha mostrado de gran utilidad en sus aplicaciones para resolver las ecuaciones de movimiento de los sistemas electrodinámicos. No obstante, se ha de tener en cuenta que sólo es posible determinar la presencia de un campo mediante la interacción a través de fuerzas con la materia.

Un ejemplo sencillo de cómo se aplica el principio variacional, debido a Thomson, es si se define la siguiente función para hacer su variación

$$S_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \phi \cdot \nabla \phi - \rho_e \phi) d^3x$$

donde ϕ es el potencial eléctrico y ρ_e la densidad de carga.

Si se hace la variación tomando a ϕ como variable de campo, obtenemos para ecuaciones de Euler-Lagrange la expresión, omitiendo en este caso la coordenada temporal de la que no depende este sistema

$$\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \right) = -\rho_e + \epsilon_0 \nabla^2 \phi$$

que reproduce la conocida ecuación de Poisson para el potencial eléctrico.

Un caso particular es si tenemos un sistema de conductores a potenciales fijos. En este caso, las cargas estarán distribuidas sólo sobre sus superficies y

$$S_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \phi \cdot \nabla \phi d^3x = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 d^3x$$

representa la energía electrostática. Por tanto, el principio variacional nos dice que los potenciales se ajustarán de forma que la energía electrostática sea un mínimo.

Con estos ejemplos, se quiere mostrar que los principios variacionales, no sólo tienen un interés teórico, sino que también son una herramienta útil para el cálculo numérico, ya que, si los conductores tienen una distribución compleja y es difícil

calcular los potenciales, para resolver el problema se pueden escoger funciones de prueba con la condición de que S_e sea un mínimo.

Lagrangiana del campo electromagnético y la materia

En general, para cada tipo de campo físico, la acción S o la lagrangiana L del sistema, se puede descomponer en tres partes: una debida al propio campo en el vacío sin materia S_c y L_c , otra de la materia o partículas que se mueven libremente S_m y L_m , y otro término que depende de la interacción de la materia o de la partícula con el campo S_{cm} y L_{cm} .

$$S = S_c + S_m + S_i \quad \text{o} \quad L = L_c + L_m + L_i$$

Haciendo la variación de los términos de la acción ($S_m + S_{cm}$) de la materia (o partícula) y de interacción del campo con la materia, obtendremos mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, las ecuaciones de movimiento de la materia (o de la partícula) en el campo de fuerzas.

Haciendo la variación de los términos de la acción ($S_c + S_{cm}$) del campo en el vacío sin materia y de su interacción con la materia, obtendremos mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange las ecuaciones que determinan como el campo es modificado o afectado por la materia o las partículas, es decir, las ecuaciones del campo producidas por las propiedades físicas de la materia que se consideran en este caso fijas.

Para concretar, aplicaremos los principios variacionales al movimiento de una carga en un campo electromagnético.

La densidad lagrangiana viene dada por

$$\mathcal{L}_m(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\gamma} \rho_{0m} c^2$$

siendo $\rho_m(\vec{x}, t)$ la densidad de materia, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ y c la velocidad de la luz.

La densidad lagrangiana de la interacción del campo electromagnético con la materia viene dada por

$$\mathcal{L}_i(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\gamma c} J^\alpha \mathcal{A}_\alpha = -\frac{1}{\gamma c} \rho_0 u^\alpha \mathcal{A}_\alpha$$

Donde $J^\alpha = \rho_0 u^\alpha$ es la densidad de corriente, ρ_0 es la densidad de carga en reposo, $\mathcal{A}^\alpha$ es el cuadrivector potencial vector $\mathcal{A}^\alpha = (\phi, c\vec{A})$, ϕ es el potencial eléctrico, $\vec{A}$ es el potencial vector magnético, u^α es el cuadrivector de velocidad $u^\alpha = \gamma(c, \vec{v})$,

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula. Definiremos también el cuadrivector de corriente $\mathcal{J}^\alpha = (\gamma\rho_0 c, \gamma\rho_0 \vec{v}) = (\rho c, \vec{j})$.

El cuadrivector de velocidad tiene la propiedad de que su norma es una constante invariante

$$u^\alpha u_\alpha = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2$$

El producto vectorial de dos cuadrivectores $\vec{A} = (A^0, \vec{A})$ y $\vec{K} = (K^0, \vec{K})$ se define por

$$\vec{A} \cdot \vec{K} \stackrel{\text{def}}{=} g_{M\alpha\beta} A^\alpha K^\beta \stackrel{\text{def}}{=} A^\alpha K_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} A^0 K^0 - A^1 K^1 - A^2 K^2 - A^3 K^3$$

La subida y baja de índices, se hace a través de tensor métrico

$$g_{M\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\alpha\beta}$$

de la forma

$$K^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\rho} K_\rho \stackrel{\text{def}}{=} (K^0, K^1, K^2, K^3) \stackrel{\text{def}}{=} (K^0, \vec{K})$$

$$K_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g_{M\alpha\sigma} K^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} (K^0, -K^1, -K^2, -K^3) \stackrel{\text{def}}{=} (K^0, -\vec{K})$$

A K_α se le denomina vector covariante del vector contravariante K^α . Esta distinción es importante cuando el tensor métrico no corresponde a la geometría euclídea como en el caso de la teoría general de la relatividad.

Cuando la geometría es euclídiana como en el caso anterior, la diferencia ente vector covariante y contravariante, es sólo de un cambio de signo de sus componentes espaciales. Mientras no se diga lo contrario, consideraremos que el espacio es de tres dimensiones y euclídeo, es decir homogéneo e isótropo.

El paso de una distribución continua de materia y cargas a partículas puntuales puede hacerse fácilmente mediante la función delta de Dirac

$$\rho(\vec{x}, t) = \Sigma q_r \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

$$\rho_m(\vec{x}, t) = \Sigma m_{0r} \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \Sigma q_r \frac{d\vec{x}_r}{dt} \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) = \Sigma q_r \vec{v}_r \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

siendo $\vec{x}_r(t)$ la trayectoria de la partícula puntual, y $\delta(\vec{x})$ la función delta de Dirac, que tiene las propiedades

$$\int_{V_\infty} \delta(\vec{x}) d^3x = 1 \quad y \quad \int_{V_\infty} \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) f(\vec{x}) d^3x = f(\vec{x}_0)$$

Los significados del campo electromagnético

La presencia de γ en las densidades lagrangianas se debe a que la integración se hace sobre el tiempo t y no sobre el tiempo propio τ .

Se define el tiempo propio τ por

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

con lo que será

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} dt$$

El cambio de dependencia de t a τ , se realiza por la transformación

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \tau) = \gamma \mathcal{L}(\vec{x}, t) \quad \text{o} \quad L(t) = \gamma L(\tau)$$

de forma que la que la integral de la acción sea invariante

$$S = \int \gamma \mathcal{L}(\vec{x}, t) d^3x dt = \int \mathcal{L}(\vec{x}, \tau) d^3x d\tau = \int \gamma L(\vec{x}, t) dt = \int L(\vec{x}, \tau) d\tau$$

Esta distinción es útil ya que en muchos caso las ecuaciones se simplifican según se expresen en función de τ en vez de de t . Esta forma de representación es más práctica cuando se utiliza la formulación cuadrimensional covariante, ya que como veremos más adelante, $d^3x d\tau$ y $\mathcal{L}(\vec{x}, \tau)$ son invariantes relativistas y por tanto también la acción.

La lagrangiana de una partícula libre viene dada entonces por

$$L_m(t) = -\frac{1}{\gamma} m_0 c^2$$

En límite no relativista ($v \ll c$) tenemos que $L_m \rightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2$, que es la energía cinética de una partícula libre.

La lagrangiana no relativista para una partícula no relativista ($v \ll c$) con una carga q en un campo electromagnético, será entonces

$$L \rightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2 - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A}$$

La lagrangiana del campo, en el vacío libre de materia, se postula que es proporcional al cuadrado de las primeras derivadas parciales del potencial vector $\mathcal{A}^\alpha = (\phi, c\vec{A})$, en analogía a una partícula libre en que su lagrangiana es proporcional al cuadrado de la derivada de la posición (velocidad)

$$\mathcal{L}_c(\vec{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\epsilon_0}{4\gamma} F^2 = -\frac{\epsilon_0}{4\gamma} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}$$

siendo

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_{\alpha,\beta} - \mathcal{A}_{\beta,\alpha} \equiv \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial x^\alpha}$$

La subida y baja de índices, se hace a través de tensor métrico de la forma

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\eta\beta} \mathcal{F}_{\gamma\eta} \text{ o } \mathcal{F}^\alpha_\beta = g^{\alpha\gamma} \mathcal{F}_{\gamma\beta} \text{ y } \mathcal{A}^\alpha = g^{\alpha\beta} \mathcal{A}_\beta$$

$\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ es un tensor antisimétrico y veremos que esta relacionada directamente con las componentes del campo eléctrico y magnético y el tensor de Maxwell.

Por tanto, la lagrangiana total de un sistema electromagnético vendrá dada por

$$\mathcal{L}(\vec{x}, t) = \underbrace{-\frac{1}{\gamma} \rho_{0m} c^2}_{\text{materia libre}} - \underbrace{\frac{1}{\gamma c} J^\alpha \mathcal{A}_\alpha}_{\text{interacción e.m.}} - \underbrace{\frac{\epsilon_0}{4\gamma} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}}_{\text{campo e.m. libre}}$$

Cuando se utiliza el tiempo propio como variable de integración en la acción es conveniente utilizar la siguiente densidad lagrangiana para la materia libre sin interacción

$$\mathcal{L}_m(\vec{x}, \tau) = -\rho_{0m} c \sqrt{(\mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}_\alpha)}$$

ya que en este caso las ecuaciones de Euler-Lagrange para una partícula puntual libre sin interacciones adoptan la forma convencional

$$m_0 \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

Principio variacional de las Ecuaciones de Maxwell

Definamos la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{mi} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_i$ de la materia junto con la interacción del campo electromagnético

$$\mathcal{L}_{mi}(\tau) = -\rho_{0m} c \sqrt{(\mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}_\alpha)} - \frac{1}{c} J^\alpha \mathcal{A}_\alpha$$

Si se hace la variación de $\mathcal{L}_{mi}$ tomando las coordenadas x^β como variables de campo $\emptyset$, entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange nos determinan como el campo influye sobre la partícula

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{mi}}{\partial x^i} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_{mi}}{\partial x^i{}_{,\alpha}} = 0$$

de las que se obtienen las ecuaciones dinámicas de movimiento

$$m_0 c \frac{dU^\alpha}{d\tau} = q F^\alpha_\beta U^\beta$$

La ecuación de movimiento se puede descomponer en su parte espacial y temporal.

De la parte espacial para $\alpha = 1, 2, 3$, se deduce la ecuación de movimiento de la carga cuando actúa sobre ella la fuerza de Lorentz $\vec{F}_L$

$$m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q \vec{\nabla} + q \vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{F}_L$$

definiéndose el campo eléctrico y de inducción magnética por

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad \vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

De la parte temporal de la ecuación de movimiento para $\alpha = 0$, se obtiene

$$\gamma m_0 c^2 = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

que es la ecuación relativista de la conservación de la energía, indicando que el trabajo eléctrico se invierte en el incremento de la energía inercial de la partícula y que, en el límite no relativista, corresponde con el exceso de energía cinética con respecto a energía de la masa en reposo.

Cuando $v/c \rightarrow 0$ entonces se recupera el límite clásico

$$\gamma m_0 c^2 \rightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2 + m_0 c^2$$

La masa en reposo m_0 es constante si el sistema está energéticamente aislado como es el caso que estamos tratando. Veremos más adelante qué modificaciones hay que introducir cuando esta condición no se cumple.

Por la propia definición del campo de inducción magnética se verifica la identidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \equiv 0$$

es decir, no existen fuentes o monopolos magnéticos, el campo magnético es solenoidal y sus líneas de campo por tanto siempre se cierran.

Además por la propia definición del campo, se verifica

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Por tanto, el primer par de ecuaciones cinemáticas de Maxwell en el vacío, la fuerza de Lorentz y la conservación de la energía, se deducen a partir de la variación de la acción escogida sobre las coordenadas de movimiento.

Esto se puede comprobar más fácilmente a partir de la lagrangiana de una partícula no relativista en que $L_{om}(t)$ es la energía cinética de la partícula.

En el caso de que tengamos una carga puntual que se mueve en una trayectoria $\vec{x}_r(t)$, las fuentes se pueden representar mediante la función de la delta de Dirac

$$\rho(\vec{x}, t) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = q\vec{v}_r(t)\delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

$$\rho_{om}(\vec{x}, t) = \Sigma m_0\delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

Con lo que será

$$L_{mi}(t) = \int (\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_i) d^3x = \frac{1}{2}m_0 \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - q\phi + q \left(\frac{d\vec{x}_r}{dt} \right) \cdot \vec{A}$$

En mecánica clásica se define el momento canónico de una partícula que se mueve en una trayectoria $\vec{x}_r(t)$ como

$$\vec{p}(\vec{x}_r, t) = \frac{\partial L_{mi}}{\partial \vec{v}_r} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}_r} \left(\frac{1}{2}m_0\vec{v}_r^2 - q\phi + q\vec{v}_r \cdot \vec{A} \right) = m_0\vec{v}_r + q\vec{A}(\vec{x}_r, t)$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para una partícula

$$\frac{\partial L_{mi}}{\partial \vec{x}_p} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

volvemos a reproducir la ecuación de movimiento para una carga puntual cuando actúa sobre ella la fuerza de Lorentz, ya que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d(m_0\vec{v}_r)}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial \vec{x}_r} \vec{v}_r \cdot \vec{A} \\ &= \frac{d(m_0\vec{v}_r)}{dt} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q \left(\vec{v}_r \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_r} \right) \vec{A} - q\vec{v}_r \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \\ \frac{\partial L_{omi}}{\partial \vec{x}_r} &= -q \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}_r} + q \left(\vec{v}_r \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_r} \right) \vec{A} \end{aligned}$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones obtenemos la ecuación de movimiento

$$\frac{d(m_0\vec{v}_r)}{dt} = -q \frac{\partial \phi}{\partial t} - q\vec{\nabla}\phi + q\vec{v}_r \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = q\vec{E} + q\vec{v}_r \wedge \vec{B}$$

Veremos más adelante, que m_0 coincide con la masa en reposo de la partícula y es constante, solo en el caso de conjunto del sistema de la partícula y el campo electromagnético sea un sistema termodinámicamente aislado y cerrado.

$F_{\alpha\beta}$ es el tensor de Maxwell en cuatro dimensiones, ya que con las anteriores definiciones se puede reescribir explícitamente como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha\beta} &= \mathcal{A}_{\beta,\alpha} - \mathcal{A}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \mathcal{A}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{A}_\alpha}{\partial x^\beta} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es de observar también que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se han obtenido a partir de las primeras derivadas de los potenciales ϕ y $\vec{A}$ y, que las ecuaciones que los relacionan deben ser tomadas como una definición de los primeros.

Aunque los potenciales se han considerado como magnitudes primarias en el cálculo variacional, sin embargo, según la física clásica no son observables directamente en la naturaleza, ya que en la fuerza de Lorentz que la única magnitud medible sólo aparecen $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Solo en mecánica cuántica mediante las interferencias del efecto de Aharon-Böhm son observables los potenciales directamente.

Esto ha dado lugar a grandes controversias antes de la llegada de la mecánica cuántica sobre que magnitudes tienen una realidad física y cuales son meros artificios matemáticos, dependiendo de la formulación que se parta. Discutiremos sobre este punto más adelante, ya que los experimentos mecánico-cuánticos de Aharon-Böhm han permitido detectar experimentalmente los potenciales por interferencia de electrones.

Analizaremos ahora como se ve el campo afectado por la presencia de materia o partículas eléctricas.

Definamos la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{em} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_i$ de la materia junto con la interacción del campo electromagnético

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{\epsilon_0}{4} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} + \frac{1}{c} \mathcal{J}^\alpha A_\alpha$$

Haciendo la variación de la acción con respecto de a las componentes del potencial vector $\mathcal{A}_\beta$, que se toman ahora variable de campo ϕ , en la que participan sólo $(\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{cm})$, obtendremos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial A_{\beta,\alpha}} = 0$$

donde hemos definido la parte electromagnética de la lagrangiana por

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{\varepsilon_0}{4} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} - \frac{1}{c} \mathcal{J}^\alpha \mathcal{A}_\alpha$$

Se comprueba que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}^2}{\partial \mathcal{A}_{\beta,\alpha}} &= -4\mathcal{F}^{\beta\alpha} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \mathcal{A}_{\beta,\alpha}} = \varepsilon_0 \mathcal{F}^{\beta\alpha} = -\varepsilon_0 \mathcal{F}^{\alpha\beta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \mathcal{A}_\beta} &= -\frac{1}{c} \mathcal{J}^\alpha \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \mathcal{A}_{\beta,\alpha}} = -\varepsilon_0 \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

por lo que las ecuaciones de Euler-Lagrange se reducen a

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \mathcal{A}_\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \mathcal{A}_{\beta,\alpha}} = \frac{1}{c} \mathcal{J}^\beta + \varepsilon_0 \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0$$

las ecuaciones del campo en función de las fuente

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c\varepsilon_0}$$

Separando las componentes temporales de las espaciales, al sustituir el potencial vector $\mathcal{A}^\alpha = (\phi, c\vec{A})$ y haciendo $x^\beta = x^0 = ct$ se obtiene

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Si identificamos el campo $\vec{E}$ con

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

nos da la ecuación dinámica de Maxwell para la ley de Gauss en el vacío

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Haciendo $x^\beta = x^i$ en las tres restantes ecuaciones, se obtiene

$$c \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial ct^2} - c \nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial ct} + c \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\vec{J}}{c\varepsilon_0}$$

que es equivalente a la ecuación dinámica de Maxwell para la ley de Ampère

$$c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{J}}{\varepsilon_0}$$

si se identifica $\vec{B}$ con

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Por tanto, el segundo par de ecuaciones dinámicas de Maxwell para fuentes de carga y corrientes eléctricas en el vacío se deduce a partir de los potenciales mediante un principio variacional.

Veremos más adelante que las ecuaciones de Maxwell son invariantes relativistas ante el grupo de las $\mathcal{P}$ -transformaciones transformación de Poincaré como consecuencia de serlo la Lagrangiana.

Un hecho importante a observar es que la corriente de desplazamiento es necesaria para que las ecuaciones sean invariantes ante las transformaciones de Lorentz.

Por ser $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ antisimétrico, de las ecuaciones de campo se deduce que se cumple la identidad

$$\frac{\partial \mathcal{J}^\alpha}{\partial x^\alpha} \equiv 0$$

que es equivalente a la ecuación de la conservación local de la carga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$$

Por consiguiente, la conservación de la carga, que es una ecuación de tipo local, está ya contenida implícitamente en las ecuaciones de campo dinámicas de Maxwell.

Se puede comprobar también que la siguiente identidad, que es una propiedad general que verifican los tensores antisimétricos,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\beta\sigma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0$$

es equivalente a las ecuaciones cinemáticas de Maxwell ya obtenidas antes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

De las ecuaciones de campo, se deduce que el tensor electromagnético $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ verifica la ecuación

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{c\epsilon_0} (\partial_\alpha \mathcal{J}_\beta - \partial_\beta \mathcal{J}_\alpha)$$

habiéndose definido

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \equiv \partial^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\mu} \partial_\mu = g^{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

por lo que se verificará

$$-\partial^\mu \partial_\mu \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

En función de los potenciales, la anterior ecuación d'alambertiana adopta la expresión

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathcal{A}^\alpha + \partial^\beta \partial_\mu \mathcal{A}^\mu = \frac{j^\alpha}{c\epsilon_0}$$

La solución de la anterior ecuación con las condiciones de contorno adecuadas, nos determina completamente el campo electromagnético.

Si se separa las componentes espaciales de las temporales, y teniendo en cuenta la definición del tensor electromagnético $\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_{\beta,\alpha} - \mathcal{A}_{\alpha,\beta}$, se obtiene para los potenciales las ecuaciones

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla^2 \phi + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Puesto que las $\mathcal{A}^\alpha$ están definidas excepto en el gradiente de un escalar, con el gauge de Lorentz

$$\frac{\partial \mathcal{A}^\alpha}{\partial x^\alpha} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

con lo que la ecuación de campo se reduce a la ecuación d'alambertiana para los potenciales

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla^2 \phi + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Si en la ecuación para el tensor electromagnético se utiliza su definición en función de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, se obtiene las ecuaciones de ondas

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right) \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{B} &= -\mu_0 \vec{J}\end{aligned}$$

Evidentemente estas ecuaciones son invariantes ante una transformación gauge.

La densidad de lagrangiana del campo también se puede reescribir en función del campo eléctrico y magnético como

$$\mathcal{L}_c = -\frac{\epsilon_0}{4} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \left((\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \phi)^2 - c^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 \right)$$

y que es invariante ante las transformaciones gauge.

Principios variacionales del tensor electromagnético

Ya hemos visto que la lagrangiana de campo electromagnético viene dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m - \frac{\epsilon_0}{4} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} - \frac{1}{c} \mathcal{J}^\alpha A_\alpha$$

siendo $\mathcal{A}^\alpha \equiv (\phi, c\vec{A})$ y $\mathcal{J}^\alpha \equiv \rho_0 \mathcal{U}^\alpha \equiv (\gamma \rho_0 c, \gamma \rho_0 \vec{v}) \equiv (\rho c, \vec{j})$

Recordemos que la subida y bajada de índices se realiza a través del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ cuyas componentes son nulas excepto en la diagonal que toma los valores $diag(+1, -1, -1, -1)$, o lo que lo mismo un cuadrivector contravariante $(\mathcal{A}^\alpha) = (A^0, \vec{A}) = (\phi, c\vec{A})$ tiene como cuadrivector covariante a $(\mathcal{A}_\alpha) = (A_0, -\vec{A}) = (\phi, -c\vec{A})$.

Hemos visto que de la variación de respecto a los potenciales $\mathcal{A}_\alpha$ resultaba las ecuaciones de de campo de Maxwell con fuentes

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c\epsilon_0}$$

que hemos visto se reducen a la ecuación d'alambertiana para los potenciales con el gauge de Lorentz $\partial_\alpha \mathcal{A}^\alpha = 0$

$$\partial_\mu x^\mu \mathcal{A}^\beta = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c^2 \epsilon_0}$$

Partiremos ahora de la lagrangiana general del campo electromagnético para hacer la variación de la acción, pero tomando ahora como condición auxiliar a la ecuación

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha$$

y como multiplicadores de Lagrange a $\frac{1}{2}\Gamma^{\alpha\beta}$.

Las ecuaciones del campo serán entonces equivalentes a extremalizar la Lagrangiana modificada

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_m - \frac{1}{c} \mathcal{J}^\alpha A_\alpha - \frac{\varepsilon_0}{4} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon_0}{2} \Gamma^{\alpha\beta} (\mathcal{F}_{\alpha\beta} - (\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha))$$

Puesto que las $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ son ahora constantes puramente algebraicas pueden ser eliminadas por medio de la ecuación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}_{\alpha\beta}} = 0 \Rightarrow \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \Gamma^{\alpha\beta}$$

resultando

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \Gamma^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha) = \mathcal{H}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\mathcal{L}_m - \frac{\varepsilon_0}{2} \Gamma^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} + \frac{\varepsilon_0}{4} \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta} + \frac{1}{c} \mathcal{J}^\alpha A_\alpha \\ &= -\mathcal{L}_m - \frac{\varepsilon_0}{4} \Gamma^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta} + \frac{1}{c} \mathcal{J}^\alpha A_\alpha \end{aligned}$$

193

Ahora las variable de campo libres serán $\mathcal{A}_\alpha$ y $\Gamma^{\alpha\beta}$ y la variación se hará respecto a ellas.

La variación respecto a A_α da según las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{\mathcal{J}^\beta}{c\varepsilon_0}$$

y la variación respecto $\Gamma^{\alpha\beta}$ nos dará

$$\Gamma_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha \mathcal{A}_\beta - \partial_\beta \mathcal{A}_\alpha) \equiv \mathcal{F}_{\alpha\beta}$$

Por tanto, la ecuación d'alambertiana para $\mathcal{A}_\alpha$, que es de segundo orden, es equivalente a las dos ecuaciones anteriores ecuaciones de primer orden.

Observemos que ahora que el tensor electromagnético $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ es una consecuencia de un principio variacional.

En este capítulo hemos visto que tanto las ecuaciones de Maxwell como la fuerza electrodinámica de Lorentz se pueden obtener simplemente de la variación de la

acción $\delta S = \delta \int \mathcal{L} dx^4 = 0$ cuya lagrangiana sólo depende de las derivadas primeras del potencial vector $\mathcal{A}^\alpha$.

Existe sin embargo una indeterminación en la definición de los potenciales, ya que si a dichos potencial se le suma el gradiente cuadrimensional de cualquier función arbitraria $\partial_\alpha \Lambda$ la lagrangiana y por tanto las ecuaciones de Maxwell quedan inalteradas. Se verá más adelante que la invariancia ante estos cambios -denominadas transformaciones gauge-, tiene un profundo significado físico, ya que entre otras cosas, justifican el origen de por qué la conservación de la carga es una ecuación de tipo local.

En el modelo variacional que se ha presentado a partir del cual se deducen las ecuaciones de Maxwell- se ha postulado que la acción del campo electromagnético en su interacción con la materia viene dada por un término proporcional a $qU^\alpha A_\alpha$. Queda sin embargo por justificar por qué la interacción del campo electromagnético con la materia adopta esta forma y cuál es el significado real de la carga. Veremos que las teorías gauge permiten profundizar en estos aspectos.

